第十一讲 二叉树模型实验

万沪宁 201842003 ： 题目3、4、5

三、二叉树模型步数对期权价值估计精确度的影响：

**题目要求：**以普通欧式期权为例，分析二叉树模型步数的增加对期权价值估计的精确度有无影响。

（一）欧式看涨期权

对于欧式看涨期权，我们设定如下参数：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 输入参数 | | | | | | |
| 股票初始价格 | 执行价格 | 无风险利率 | 波动率 | 到期期限 | 期数 | 红利率 |
| S0 | X | R | σ | T(year) | N | q |
| 100.0000 | 110.00 | 0.05 | 0.2 | 1.000 | 2 | 0 |

利用二叉树期权计算的Excel表格，我们得到当期数在2-280之间时，欧式看涨期权的价值。同时，我们利用Black-Scholes公式，计算得到该欧式期权的理论价值应该为11.46。计算得到的数据如下表所示：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **二叉树期数** | **欧式看涨期权价格** | **BS公式看涨期权理论价值** |
| 2 | 11.82377354 | 11.45545587 |
| 3 | 11.48217163 | 11.45545587 |
| 4 | 11.85306128 | 11.45545587 |
| 5 | 11.22871292 | 11.45545587 |
| 6 | 11.78617262 | 11.45545587 |
| 7 | 11.1185365 | 11.45545587 |
| 8 | 11.72081088 | 11.45545587 |
| 9 | 11.0835928 | 11.45545587 |
| 10 | 11.66509443 | 11.45545587 |
| 20 | 11.48799141 | 11.45545587 |
| 30 | 11.39208688 | 11.45545587 |
| 40 | 11.40263186 | 11.45545587 |
| 50 | 11.45491244 | 11.45545587 |
| 60 | 11.47631598 | 11.45545587 |
| 70 | 11.48283627 | 11.45545587 |
| 80 | 11.48165295 | 11.45545587 |
| 90 | 11.47632764 | 11.45545587 |
| 100 | 11.46875587 | 11.45545587 |
| 120 | 11.45067129 | 11.45545587 |
| 140 | 11.43162234 | 11.45545587 |
| 160 | 11.44959318 | 11.45545587 |
| 180 | 11.45998898 | 11.45545587 |
| 200 | 11.46439838 | 11.45545587 |
| 220 | 11.46497441 | 11.45545587 |
| 240 | 11.46304823 | 11.45545587 |
| 260 | 11.45947195 | 11.45545587 |
| 280 | 11.45480632 | 11.45545587 |

为了更清楚的分析期权价值估计的精确度，我们将二叉树法计算得到的欧式期权价值化在下图中，如蓝线所示。

同时，BS公式计算出的期权的理论价值如橙色线所示。分析两条线我们可以发现，随二叉树期数的增加，其计算出来的看涨期权价值与BS公式计算出的理论值越来越接近，当期数大于30时，差异仅为0.03，可以认为二者间已无明显差异。

采用相同的参数与方法，我们继续分析欧式看跌期权，得到如下数据表格：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **二叉树期数** | **欧式看跌期权价格** | **BS公式看跌期权理论价值** |
| 2 | 11.35588952 | 10.98757186 |
| 3 | 11.01428762 | 10.98757186 |
| 4 | 11.38517726 | 10.98757186 |
| 5 | 10.7608289 | 10.98757186 |
| 6 | 11.3182886 | 10.98757186 |
| 7 | 10.65065249 | 10.98757186 |
| 8 | 11.25292687 | 10.98757186 |
| 9 | 10.61570878 | 10.98757186 |
| 10 | 11.19721041 | 10.98757186 |
| 20 | 11.02010739 | 10.98757186 |
| 30 | 10.92420287 | 10.98757186 |
| 40 | 10.93474784 | 10.98757186 |
| 50 | 10.98702843 | 10.98757186 |
| 60 | 11.00843196 | 10.98757186 |
| 70 | 11.01495225 | 10.98757186 |
| 80 | 11.01376894 | 10.98757186 |
| 90 | 11.00844363 | 10.98757186 |
| 100 | 11.00087185 | 10.98757186 |
| 120 | 10.98278727 | 10.98757186 |
| 140 | 10.96373832 | 10.98757186 |
| 160 | 10.98170917 | 10.98757186 |
| 180 | 10.99210496 | 10.98757186 |
| 200 | 10.99651437 | 10.98757186 |
| 220 | 10.99709039 | 10.98757186 |
| 240 | 10.99516422 | 10.98757186 |
| 260 | 10.99158793 | 10.98757186 |
| 280 | 10.9869223 | 10.98757186 |

我们同样画出差异图进行进一步观察：

**结论：**对于欧式期权，随着二叉树模型步数的增加，期权价值估计的精确度随之升高，对于一年期期权来说，二叉树期数为30是一个分界线，当期数低于30时精确度较低，而大于等于30期时结果已经非常精确。

四、验证无收益资产的美式期权提前执行的可能性：

**题目要求：**验证无收益资产的美式期权是否存在提前执行的可能性。

我们利用欧美式期权--二叉树--函数方式.xlsm 中的二叉树定价公式，在如下参数取值的情形下，为欧美式看涨、看跌期权进行定价。

在参数取值过程中，我们考虑实值、平值和虚值三种情况，在100的固定执行价格下，让初始价格在80-120的范围变化。同时，我们固定初始价格和执行价格均为100，分别变动无风险利率、波动率、到期期限与二叉树期数，分析这四个变量对美式期权是否提前行权之间可能存在的关系。

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 股票初始价格 | 执行价格 | 无风险利率 | 波动率 | 到期期限 | 二叉树期数 |
| S0 | X | Rf | σ | T（单位：年） | N |
| 80 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 82 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 84 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 86 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 88 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 90 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 92 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 94 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 96 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 98 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 100 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 100 | 100 | 4% | 0.2 | 2 | 100 |
| 100 | 100 | 5% | 0.2 | 2 | 100 |
| 100 | 100 | 3% | 0.1 | 2 | 100 |
| 100 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 100 | 100 | 3% | 0.3 | 2 | 100 |
| 100 | 100 | 3% | 0.2 | 1 | 100 |
| 100 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 100 | 100 | 3% | 0.2 | 3 | 100 |
| 100 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 50 |
| 100 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 100 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 150 |
| 102 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 104 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 106 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 108 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 110 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 112 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 114 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 116 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 118 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |
| 120 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 |

对于看涨期权，结果如下表所示：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **欧式看涨期权** | **美式看涨期权** | **看涨期权是否提前行权** |
| Call\_eur | Call\_us | Yes/No |
| 4.257337309 | 4.257337309 | No |
| 4.987083543 | 4.987083543 | No |
| 5.716829777 | 5.716829777 | No |
| 6.570992159 | 6.570992159 | No |
| 7.45541948 | 7.45541948 | No |
| 8.395318515 | 8.395318515 | No |
| 9.43887823 | 9.43887823 | No |
| 10.48243794 | 10.48243794 | No |
| 11.64399287 | 11.64399287 | No |
| 12.84489746 | 12.84489746 | No |
| 14.04580205 | 14.04580205 | No |
| 15.05672229 | 15.05672229 | No |
| 16.0985722 | 16.0985722 | No |
| 8.854429395 | 8.854429395 | No |
| 14.04580205 | 14.04580205 | No |
| 19.34145952 | 19.34145952 | No |
| 9.393595624 | 9.393595624 | No |
| 14.04580205 | 14.04580205 | No |
| 17.86567462 | 17.86567462 | No |
| 14.01803994 | 14.01803994 | No |
| 14.04580205 | 14.04580205 | No |
| 14.05507226 | 14.05507226 | No |
| 15.3962405 | 15.3962405 | No |
| 16.74667895 | 16.74667895 | No |
| 18.10941655 | 18.10941655 | No |
| 19.59644726 | 19.59644726 | No |
| 21.08347797 | 21.08347797 | No |
| 22.5717953 | 22.5717953 | No |
| 24.17874987 | 24.17874987 | No |
| 25.78570445 | 25.78570445 | No |
| 27.39265902 | 27.39265902 | No |
| 29.07573233 | 29.07573233 | No |

分析结果发现，不论参数如何变化，欧式看涨期权价格均等于对应的美式看涨期权的价格，期权不会提前执行。

下面我们来分析看跌期权：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **欧式看跌期权** | **美式看跌期权** | **看跌期权是否提前行权** |
| Put\_eur | Put\_us | Yes/No |
| 18.43379067 | 20.69425673 | Yes |
| 17.1635369 | 19.13782163 | Yes |
| 15.89328314 | 17.65300702 | Yes |
| 14.74744552 | 16.28172873 | Yes |
| 13.63187284 | 14.99147676 | Yes |
| 12.57177187 | 13.77276462 | Yes |
| 11.61533159 | 12.66602258 | Yes |
| 10.6588913 | 11.60042022 | Yes |
| 9.820446227 | 10.63722519 | Yes |
| 9.021350819 | 9.742772256 | Yes |
| 8.222255412 | 8.874419663 | Yes |
| 7.368356933 | 8.262993562 | Yes |
| 6.582314007 | 7.711677885 | Yes |
| 3.030882754 | 3.665095074 | Yes |
| 8.222255412 | 8.874419663 | Yes |
| 13.51791288 | 14.18769399 | Yes |
| 6.438148979 | 6.733179676 | Yes |
| 8.222255412 | 8.874419663 | Yes |
| 9.258793149 | 10.29272559 | Yes |
| 8.194493295 | 8.861811181 | Yes |
| 8.222255412 | 8.874419663 | Yes |
| 8.231525621 | 8.878559429 | Yes |
| 7.572693859 | 8.129553262 | Yes |
| 6.923132307 | 7.418161099 | Yes |
| 6.285869905 | 6.729709564 | Yes |
| 5.772900619 | 6.152830286 | Yes |
| 5.259931332 | 5.598401694 | Yes |
| 4.74824866 | 5.056210743 | Yes |
| 4.355203232 | 4.614286558 | Yes |
| 3.962157804 | 4.192430777 | Yes |
| 3.569112377 | 3.779037064 | Yes |
| 3.252185687 | 3.429561626 | Yes |

对于看跌期权，结果完全相反，对于我们设置的所有参数组合，美式看跌期权价值均大于对应的欧式看跌期权，表明美式看跌期权会提前执行。

**结论：**在二叉树模型下，当标的资产不发放红利时，美式看涨期权不会提前执行，但是美式看跌期权会提前执行。

五、验证美式期货期权的上下限是否成立：

在课上我们学到过，标的资产支付红利和不支付红利时美式期权的上下限不同，所以在本题中，我们除了要考虑问题四中的五个因素对美式期权上下限关系是否满足的影响，还需要将标的资产的红利率纳入考量。

所以，在实验四输入参数的基础上，我们进一步考虑红利支付情况，即考虑股票初始价格、执行价格、无风险利率、波动率、到期期限、二叉树期数以及红利率六个因素对期权是否满足上下限关系的影响。增加的数据序列如下表所示：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 股票初始价格 | 执行价格 | 无风险利率 | 波动率 | 到期期限 | 二叉树期数 | 红利率 |
| S0 | X | Rf | σ | T（单位：年） | N | q |
| 100 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 50 | 5% |
| 100 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 | 10% |
| 100 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 150 | 15% |
| 100 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 100 | 20% |
| 100 | 100 | 3% | 0.2 | 2 | 150 | 25% |

得到美式期货期权的价值后，我们将其与期权的理论上下限进行比较，进而得出结论。

**（1）美式看涨期权：**

我们通过如下公式计算无红利支付情况下美式看涨期权的上下限：



利用下面的公式计算美式有红利支付时美式看涨期权的上下限：



**（2）美式看跌期权：**

对于看跌期权，不论标的资产是否支付红利，其均满足如下上下限关系：



美式看涨期权结果如下表所示，其中绿色部分表示有红利支付：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **美式看涨期权** | **下限** | **上限** | **看涨期权是否满足上下限关系** |
| Call\_us | lower bound | upper bound | Yes/No |
| 4.257337309 | 0 | 80 | Yes |
| 4.987083543 | 0 | 82 | Yes |
| 5.716829777 | 0 | 84 | Yes |
| 6.570992159 | 0 | 86 | Yes |
| 7.45541948 | 0 | 88 | Yes |
| 8.395318515 | 0 | 90 | Yes |
| 9.43887823 | 0 | 92 | Yes |
| 10.48243794 | 0 | 94 | Yes |
| 11.64399287 | 1.823546642 | 96 | Yes |
| 12.84489746 | 3.823546642 | 98 | Yes |
| 14.04580205 | 5.823546642 | 100 | Yes |
| 15.05672229 | 7.688365361 | 100 | Yes |
| 16.0985722 | 9.516258196 | 100 | Yes |
| 8.854429395 | 5.823546642 | 100 | Yes |
| 14.04580205 | 5.823546642 | 100 | Yes |
| 19.34145952 | 5.823546642 | 100 | Yes |
| 9.393595624 | 2.955446645 | 100 | Yes |
| 14.04580205 | 5.823546642 | 100 | Yes |
| 17.86567462 | 8.606881473 | 100 | Yes |
| 14.01803994 | 5.823546642 | 100 | Yes |
| 14.04580205 | 5.823546642 | 100 | Yes |
| 14.05507226 | 5.823546642 | 100 | Yes |
| 15.3962405 | 7.823546642 | 102 | Yes |
| 16.74667895 | 9.823546642 | 104 | Yes |
| 18.10941655 | 11.82354664 | 106 | Yes |
| 19.59644726 | 13.82354664 | 108 | Yes |
| 21.08347797 | 15.82354664 | 110 | Yes |
| 22.5717953 | 17.82354664 | 112 | Yes |
| 24.17874987 | 19.82354664 | 114 | Yes |
| 25.78570445 | 21.82354664 | 116 | Yes |
| 27.39265902 | 23.82354664 | 118 | Yes |
| 29.07573233 | 25.82354664 | 120 | Yes |
| 9.20327305 | 0 | 100 | Yes |
| 6.594141425 | 0 | 100 | Yes |
| 4.943868283 | 0 | 100 | Yes |
| 3.835170412 | 0 | 100 | Yes |
| 3.091683366 | 0 | 100 | Yes |

我们发现，对于美式看涨期权，表中所有参数下均满足上下限关系。

美式看跌期权结果如下表所示，其中绿色部分同样表示有红利支付：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **美式看跌期权** | **期权下限** | **期权上限** | **看跌期权是否满足上下限关系** |
| Put\_us | lower bound | upper bound | Yes/No |
| 20.69425673 | 20 | 100 | Yes |
| 19.13782163 | 18 | 100 | Yes |
| 17.65300702 | 16 | 100 | Yes |
| 16.28172873 | 14 | 100 | Yes |
| 14.99147676 | 12 | 100 | Yes |
| 13.77276462 | 10 | 100 | Yes |
| 12.66602258 | 8 | 100 | Yes |
| 11.60042022 | 6 | 100 | Yes |
| 10.63722519 | 4 | 100 | Yes |
| 9.742772256 | 2 | 100 | Yes |
| 8.874419663 | 0 | 100 | Yes |
| 8.262993562 | 0 | 100 | Yes |
| 7.711677885 | 0 | 100 | Yes |
| 3.665095074 | 0 | 100 | Yes |
| 8.874419663 | 0 | 100 | Yes |
| 14.18769399 | 0 | 100 | Yes |
| 6.733179676 | 0 | 100 | Yes |
| 8.874419663 | 0 | 100 | Yes |
| 10.29272559 | 0 | 100 | Yes |
| 8.861811181 | 0 | 100 | Yes |
| 8.874419663 | 0 | 100 | Yes |
| 8.878559429 | 0 | 100 | Yes |
| 8.129553262 | 0 | 100 | Yes |
| 7.418161099 | 0 | 100 | Yes |
| 6.729709564 | 0 | 100 | Yes |
| 6.152830286 | 0 | 100 | Yes |
| 5.598401694 | 0 | 100 | Yes |
| 5.056210743 | 0 | 100 | Yes |
| 4.614286558 | 0 | 100 | Yes |
| 4.192430777 | 0 | 100 | Yes |
| 3.779037064 | 0 | 100 | Yes |
| 3.429561626 | 0 | 100 | Yes |
| 12.28785246 | 0 | 100 | Yes |
| 17.20231384 | 0 | 100 | Yes |
| 22.66526484 | 0 | 100 | Yes |
| 28.36507269 | 0 | 100 | Yes |
| 34.05624697 | 0 | 100 | Yes |

同样的，所有参数结果均表明期权价格满足上下限关系。